

УТВЕРЖДАЮ

Председатель приемной комиссии
ректор университета


Е.В. Кудряшова

« 30 » сентября 2014 г.

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ
ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
в 2015 году**

Архангельск
2015 год

ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в
Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова
в 2015 году

I. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Алгебра, начала математического анализа

1. Натуральные числа и арифметические действия с ними. Простые и составные числа. Делитель, кратное. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное. Общие свойства делимости. Признаки делимости чисел на 2, 3, 5, 9, 10.
2. Целые числа. Правила арифметических действий с числами разных знаков.
3. Рациональные числа. Правила арифметических действий с рациональными числами, представленными в виде обыкновенных и десятичных дробей. Сравнение рациональных чисел. Процентное отношение. Пропорция.
4. Действительные числа, их представление в виде десятичных дробей. Числовая прямая, изображение действительных чисел и их множеств на числовой прямой. Пересечение, объединение числовых промежутков. Модуль действительного числа. Свойства и геометрический смысл модуля числа.
5. Степени с натуральным, целым и рациональными показателями. Свойства степеней. Арифметический корень, свойства корней. Логарифмы и их свойства.
6. Выражения с переменными. Тождественное равенство выражений на общей области допустимых значений переменных. Одночлен, подобные одночлены, многочлен с одной переменной. Корни многочленов. Условия существования и формула корней квадратного трехчлена. Теорема Виета. Разложение многочленов на множители. Формулы сокращенного умножения. Алгебраические дроби, правила арифметических действий с алгебраическими дробями.
7. Понятие функции. Способы задания функций. Область определения, множество значений и график числовой функции. Свойства числовых функций: нули, промежутки знакопостоянства, монотонность (возрастание, убывание, постоянство), четность, нечетность, периодичность, наибольшее и наименьшее значение на промежутке, критические точки, экстремумы (максимум, минимум). Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Необходимое (достаточное) условие экстремума функции.
8. Определения, основные свойства и графики следующих элементарных функций: линейной $y = kx + b$; квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, где $c \neq 0$; степенных вида $y = ax^n$, $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{k}{x}$, где $a \neq 0$, $n \in N$, $k \neq 0$; показательной $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, логарифмической $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$;

тригонометрических $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Понятия $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$ и их свойства.

9. Уравнение. Корень уравнения. Неравенство. Решение неравенства. Равносильность уравнений и неравенств. Виды равносильных преобразований при решении уравнений и неравенств. Системы уравнений и неравенств. Решение системы.
10. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы n -го члена, суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий.
11. Основное тригонометрическое тождество, зависимость между тригонометрическими функциями одного аргумента, синус и косинус суммы и разности двух аргументов, формулы приведения, формулы двойного и половинного аргументов, формулы суммы и разности синусов и косинусов.
12. Производная. Ее физический и геометрический смысл. Производные основных элементарных функций. Правила вычисления производной суммы, произведения и частного двух функций, сложной функции вида $y = f(kx+b)$. Уравнение касательной к графику функции. Первообразная. Первообразные основных элементарных функций.

Геометрия

1. Точка, прямая, плоскость, луч, отрезок, ломаная, угол. Длина отрезка, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Параллельные и перпендикулярные прямые (признаки и свойства).
2. Треугольник: прямоугольный, равнобедренный, равносторонний (их признаки и свойства). Медиана, биссектриса и высота треугольника (их определения и свойства). Формулы площади треугольника. Теоремы синусов и косинусов. Теорема о сумме углов треугольника. Тригонометрические функции острого угла прямоугольно треугольника. Окружность, описанная около треугольника и вписанная в треугольник (теоремы о положении центров, формулы нахождения радиусов). Равенство и подобие треугольников (свойства и признаки). Равновеликость.
3. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция (определения, признаки, свойства). Четырехугольник, вписанный в окружность и описанный около окружности (признаки и свойства). Формулы площадей.
4. Окружность, круг, сектор, дуга окружности, центр, хорда, радиус, диаметр. Свойство пересекающихся хорд и хорд, перпендикулярных диаметру. Свойство касательных, проведенных из одной точки к окружности. Вписанный и центральный углы, их измерения. Свойства вписанных углов. Площадь круга, длина окружности, длина дуги окружности, площадь сектора. Радианная мера угла.
5. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Признаки и свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Расстояние между параллельными прямыми, скрещивающимися прямыми, прямой и параллельной ей плоскостью, параллельными плоскостями. Проекция прямой на плоскость. Перпендикуляр к плоскости. Угол между

плоскостями (двугранный угол), его линейный угол. Аксиомы задания плоскости.

6. Многогранники: призма, пирамида, параллелепипед и их виды. Вершина, грань, ребро, высота, диагональ. Формулы объемов, площадей поверхностей. Сечение многогранника плоскостью.
7. Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Образующая, высота, поверхность, основания, радиус, центр. Касательная плоскость. Формулы объемов и площадей поверхностей.

II. ОСНОВНЫЕ УМЕНИЯ И НАВЫКИ

1. Выполнять арифметические действия над числами, заданными в виде десятичной и обыкновенной дробей, находить значения выражений точные и приближенные с заданной точностью, округлять значения выражений.
2. Проводить тождественные преобразования числовых выражений и выражений с переменными с целью их упрощения или приведения к указанному виду, выполнения указанных действий. Применять в процессе преобразований выражений известные тождества, законы арифметики и алгебры. Применять тождественные преобразования при решении уравнений и неравенств.
3. Аналитически и графически исследовать свойства функций, строить их графики. Использовать для этой цели определения свойств функций, геометрический смысл свойств, основные свойства элементарных функций, правила преобразования графиков функций, теоремы о связи свойств функции с ее производной.
4. Решать уравнения и неравенства, сводящиеся к линейным, квадратным, простейшим тригонометрическим, показательным и логарифмическим. Применять к решению уравнений и неравенств равносильные и тождественные преобразования. Применять к решению уравнений и неравенств основные разновидности метода равносильных преобразований (разложение на множители, замена переменной, исследование на промежутках области допустимых значений) и функциональные представления. Решать системы уравнений и неравенств.
5. Решать геометрические задачи, сюжетные задачи, задачи на числовые зависимости, сводящиеся к решению уравнений и их систем.
6. Изображать геометрические фигуры на чертеже и проводить простейшие построения на плоскости.

СТРУКТУРА ПИСЬМЕННОЙ ЭКЗАМЕНАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Экзаменационная работа состоит из 14 заданий различного уровня сложности: задания 1–6 (*базового уровня сложности*) направлены на проверку знаний и умений абитуриентов за курс средней школы (алгебра и начала математического анализа); задания 7–10 (*повышенного уровня сложности*) охватывают материал основной школы и средней школы; задание 11–14 (*высокого уровня сложности*) направлено на проверку знаний и умений по школьному курсу алгебры, начал математического анализа и стереометрии.

Результат решения каждого задания оформляется в виде краткого ответа (решения заданий не оформляются в листе ответов и не проверяются при оценивании работы). Ответом задания может быть одно число (любое действительное), набор чисел, числовой промежуток (единицы измерения в ответе не указываются, результаты не округляются).

Ответ каждого задания в зависимости от его правильности и полноты оценивается определенным количеством баллов согласно таблице, представленной ниже.

Таблица. Границы баллов оценивания ответов

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Баллы	0-5	0-5	0-5	0-5	0-5	0-5	0-7	0-7	0-7	0-9	0-10	0-10	0-10	0-10

Максимально возможный балл за экзаменационную работу равен 100.

ПРИМЕР ВАРИАНТА ЭКЗАМЕНАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Найдите корень уравнения $\sqrt{13+6x} = 11$.
2. В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 1800 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 6 недель?
3. Решите неравенство $8 \cdot (4+x) < -4$.
4. Найдите количество точек пересечения графиков функций $y = x^2 - 6x + 5$ и $y = -3$.
5. Решите уравнение $4^{2x-17} = \frac{1}{16}$.
6. Найдите значение выражения $\frac{\log_5 17}{\log_{125} 17}$.
7. Прямая $y = 5x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 9x + 14$. Найдите абсциссу точки касания.
8. Решите уравнение $\cos \frac{\pi(4x+2)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе укажите наименьший положительный корень.
9. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\log_{0,5}(4x-1)}$.
10. Основание равнобедренного остроугольного треугольника равно 48, а радиус описанной около него окружности равен 25. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника.
11. Решите неравенство $\frac{4^{|x+1|} + 2}{3} \geq 2^{|x+1|}$.
12. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $ax^2 + 2x + 2a - 1 < 0$ верно для любого значения x из промежутка $[1; +\infty)$.

13. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 80 км, выехал автобус. В середине пути он был задержан на 10 мин, но, увеличив скорость на 20 км/ч, прибыл в пункт B вовремя. С какой скоростью ехал автобус первую половину пути?
14. В основании наклонного параллелепипеда лежит квадрат со стороной 6 см. Одно из диагональных сечений призмы перпендикулярно плоскости основания и является ромбом с углом 60° . Найдите объем призмы.

СТРУКТУРА ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА ДЛЯ СОБЕСЕДОВАНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

На собеседовании абитуриенту предлагается выполнить задания разного уровня сложности из нескольких разделов математики, соответствующих программе. Время, отводимое на прохождение собеседования, составляет 20 минут.

Билет для собеседования по математике состоит из 6 заданий, выполнение которых оценивается по 100-балльной шкале. В зависимости от полноты и правильности приведенного решения и формулировок математических утверждений, используемых в решении задач, за выполнение заданий 1 и 2 выставляется от 0 до 10 баллов, заданий 3 и 4 – от 0 до 15 баллов, задания 5 – 20 баллов, задания 6 – 30 баллов.

Для оценивания выполнения заданий используются следующие общие критерии:

Задание 1	
Оценка в баллах	Содержание критерия
10	Верно сформулировано утверждение
7-9	В формулировке утверждения допущены недочеты
4-6	Содержание утверждения проиллюстрировано на конкретных примерах или соответствует частным случаям
1-3	В формулировке утверждения допущены ошибки, но они откорректированы в ходе беседы с экзаменатором
0	Утверждение не сформулировано
Задание 2	
Оценка в баллах	Содержание критерия
10	Ход решения правильный. Решение завершено. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ
6-9	Верно выполнены преобразования. Допустима описка или вычислительная ошибка
3-5	Задание выполнено с ошибкой, которая исправлена в ходе собеседования с экзаменатором

1-2	Абитуриент выполняет задание по формулировке соответствующего математического утверждения, сформулированного экзаменатором
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок от 0 до 10 баллов
Задания 3, 4	
Оценка в баллах	Содержание критерия
15	Ход решения правильный. Решение завершено. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ
12-14	Решение доведено до конца. Допустима описка или вычислительная ошибка
8-11	Сформулирован правильный план решения, верно выполнены только некоторые этапы решения задачи (не менее 70%)
5-7	Представлен правильный план решения, выполнена одна из подзадач поставленного задания
1-5	Выполнена одна из подзадач поставленного задания
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок от 0 до 15 баллов
Задание 5	
Оценка в баллах	Содержание критерия
20	Ход решения правильный. Решение завершено. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
18-19	Решение доведено до конца. Допустимы описки или вычислительная ошибка
11-17	Решение может быть не завершено, но не содержит грубых ошибок
5-10	Решение содержит ошибки, но абитуриент верно формулирует ключевые математические утверждения, необходимые для решения задачи
1-4	Абитуриент выполнил одну из подзадач, сформулированных экзаменатором к поставленному заданию билета
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок от 0 до 20 баллов
Задание 6	
Оценка в баллах	Содержание критерия
30	Приведено обоснованное решение и получен верный ответ. Все

	преобразования и вычисления выполнены верно
24-29	Решение доведено до конца, но не содержит необходимых обоснований. Допустима описка или вычислительная ошибка
18-23	Решение не доведено до конца, но выявлены все ключевые зависимости геометрической конфигурации
11-17	Ход решения правильный, но решение, возможно, не завершено. Верно найдены некоторые геометрические величины, необходимые в решении задачи. Окончательный ответ не получен или неверен
1-10	Верно выполнен чертеж по условию задачи и сформулированы некоторые теоремы, определения или формулы, необходимые в решении задачи
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок от 0 до 30 баллов

ПРИМЕРЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ ДЛЯ СОБЕСЕДОВАНИЯ

Билет № 1

1. Закончите предложение: «Сумма двух сторон любого треугольника».
2. Упростите выражение $t^{-4.5} \cdot t^{-0.2}$.
3. Решите неравенство $\frac{5x+15}{2x} \geq 0$.
4. Решите уравнение $4^{x^2+x} = 16$.
5. Решите неравенство $\log_4(x-4) < 2$.
6. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектриса угла BAD проходит через середину M стороны CD . Известно, что $AB = 5$, $AM = 4$. Найдите длину отрезка BM .

Билет № 2

1. Закончите предложение: «Биссектрисой угла называется».
2. Вычислите $\sqrt[3]{25 \cdot 135}$.
3. Решите неравенство $x^2 - 5x + 6 < 0$.
4. Решите уравнение $\log_3(4x+8) = \log_3(2x+2)$.
5. Решите неравенство $\left(\frac{1}{11}\right)^{x+2} \geq 11^x$
6. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .

Билет № 3

1. Закончите предложение: «Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на».
2. Найдите значение выражения $\frac{5^9 \cdot 2^8}{10^7}$.

3. Решите неравенство $x(x^2 - 1)(x + 6) \leq 0$.
4. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 2x - 2} = 1$.
5. Постройте график функции $y = \log_3(x - 2)$.
6. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания равен 45° . Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

Билет № 4

1. Закончите предложение: «График четной функции симметричен».
2. Найдите значение выражения $\log_3 5,4 + \log_3 5$.
3. Решите неравенство $4\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x \geq 1$.
4. Решите уравнение $(x + 3)\sqrt{x - 5} = 0$.
5. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = -x^3 + 2x^2 - 5x + 1$.
6. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 6, а боковое ребро образует с высотой пирамиды угол 60° . Найдите объем пирамиды.