

УТВЕРЖДАЮ

Председатель приемной комиссии
и.о. ректора университета



Н.В. Чичерина

_____ 2015 г.

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

для поступающих в

**Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
в 2016 году**

Архангельск
2015 год

ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на направления подготовки бакалавриата и специалитета САФУ имени М.В. Ломоносова

На экзамене абитуриент должен показать математические знания и умения в рамках требований к выпускникам общеобразовательных школ, определяемых федеральным государственным образовательным стандартом (ФГОС) среднего полного общего образования. При решении задач абитуриент также имеет право использовать математические знания, выходящие за рамки содержания программ по математике для средних общеобразовательных школ.

Данная программа конкретизирует положения ФГОС. Она состоит из двух основных разделов. Первый из них представляет собой перечень основных математических понятий и фактов, которыми должен владеть абитуриент (знать формулировки определений, теорем, аксиом, правил, алгоритмов, формул и т.п. и уметь правильно использовать их при решении задач). Во втором разделе перечислены основные математические умения и навыки, которыми должен владеть абитуриент.

I. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

*Арифметика, алгебра, начала математического анализа,
элементарная теория вероятностей*

1. Натуральные числа и арифметические действия с ними. Простые и составные числа. Делитель, кратное. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное. Общие свойства делимости. Признаки делимости чисел на 2, 3, 5, 9, 10.
2. Целые числа. Правила арифметических действий с числами разных знаков.
3. Рациональные числа. Правила арифметических действий с рациональными числами, представленными в виде обыкновенных и десятичных дробей. Сравнение рациональных чисел. Процентное отношение. Пропорция.
4. Действительные числа, их представление в виде десятичных дробей. Числовая прямая, изображение действительных чисел и их множеств на числовой прямой. Пересечение, объединение числовых промежутков. Модуль действительного числа. Свойства и геометрический смысл модуля числа.
5. Степени с натуральным, целым и рациональными показателями. Свойства степеней. Арифметический корень, свойства корней. Логарифмы и их свойства.
6. Выражения с переменными. Тождественное равенство выражений на общей области допустимых значений переменных. Одночлен, подобные одночлены, многочлен с одной переменной. Корни многочленов. Условия существования и формула корней квадратного трехчлена. Теорема Виета и обратная к ней. Разложение многочленов на множители. Формулы сокращенного умножения. Алгебраические дроби, правила арифметических действий с алгебраическими дробями.
7. Понятие функции. Способы задания функций. Область определения, множество значений и график числовой функции. Свойства числовых функций: нули, промежутки знакопостоянства, монотонность (возрастание, убывание, постоянство), четность, нечетность, периодичность, наибольшее и наименьшее значение на промежутке, критические точки, экстремумы (максимум, минимум). Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Необходимое (достаточное) условие экстремума функции.
8. Определения, основные свойства и графики следующих элементарных функций: линейной $y = kx + b$; квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$; степенных вида $y = ax^n$, $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{k}{x}$, где $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$; показательной $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$;

- логарифмической $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$; тригонометрических $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Понятия $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$ и их свойства.
9. Уравнение. Корень уравнения. Неравенство. Решение неравенства. Равносильность уравнений и неравенств. Виды равносильных преобразований при решении уравнений и неравенств. Системы уравнений и неравенств. Решение системы.
 10. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы n -го члена, суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий.
 11. Основное тригонометрическое тождество, зависимость между тригонометрическими функциями одного аргумента, тригонометрические функции суммы и разности двух аргументов, формулы приведения, формулы двойного и половинного аргументов, формулы суммы и разности двух одноименных тригонометрических функций.
 12. Производная. Ее физический и геометрический смысл. Производные основных элементарных функций. Правила вычисления производной суммы, произведения и частного двух функций, сложной функции вида $y = f(kx + b)$. Уравнение касательной к графику функции.
 13. Первообразная. Первообразные основных функций. Определенный интеграл и его геометрический смысл. Формула Ньютона-Лейбница.
 14. Случайные события. Вероятность события. Основные характеристики случайных величин и правила нахождения их вероятностей.

Геометрия

1. Точка, прямая, плоскость, луч, отрезок, ломаная, угол. Длина отрезка, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Параллельные и перпендикулярные прямые (признаки и свойства).
2. Треугольник: прямоугольный, равнобедренный, равносторонний (их признаки и свойства). Медиана, биссектриса и высота треугольника (их определения и свойства). Формулы площади треугольника. Теоремы синусов и косинусов. Теорема о сумме углов треугольника. Тригонометрические функции острого угла прямоугольно треугольника. Окружность, описанная около треугольника и вписанная в треугольник (теоремы о положении центров, формулы нахождения радиусов). Равенство и подобие треугольников (свойства и признаки). Равновеликость.
3. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция (определения, признаки, свойства). Четырехугольник, вписанный в окружность и описанный около окружности (признаки и свойства). Формулы площадей.
4. Окружность, круг, сектор, дуга окружности, центр, хорда, радиус, диаметр. Свойство пересекающихся хорд и хорд, перпендикулярных диаметру. Свойство касательных, проведенных из одной точки к окружности. Вписанный и центральный углы, их измерения. Свойства вписанных углов. Площадь круга, длина окружности, длина дуги окружности, площадь сектора. Радианная мера угла.
5. Аксиомы задания плоскости. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Признаки и свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Перпендикуляр к плоскости. Проекция прямой на плоскость. Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости, между параллельными прямыми, скрещивающимися прямыми, прямой и параллельной ей плоскостью, параллельными плоскостями. Угол между скрещивающимися прямыми, пересекающимися плоскостями, двугранный угол и его линейный угол.
6. Многогранники: призма, пирамида, параллелепипед и их виды. Элементы многогранников: вершина, грань, ребро, высота, диагональ. Формулы объемов и площадей поверхностей многогранников. Сечение многогранника плоскостью.
7. Тела вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Элементы тел вращения: образующая, высота, поверхность, основание, радиус, центр. Касательная плоскость. Формулы объемов и площадей поверхностей тел вращения.

II. ОСНОВНЫЕ УМЕНИЯ И НАВЫКИ

1. Выполнять арифметические действия над числами, заданными в виде десятичной и обыкновенной дробей, находить значения выражений точные и приближенные с заданной точностью, округлять значения выражений.
2. Проводить тождественные преобразования числовых выражений и выражений с переменными с целью их упрощения, приведения к указанному виду, выполнения указанных действий. Применять в процессе преобразований выражений известные тождества, законы арифметики и алгебры. Применять тождественные преобразования при решении уравнений и неравенств.
3. Аналитически и графически исследовать свойства функций, строить их графики. Использовать для этой цели определения свойств функций, геометрический смысл свойств, основные свойства элементарных функций, правила преобразования графиков функций, теоремы о связи свойств функции с ее производной.
4. Решать уравнения и неравенства, сводящиеся к линейным, квадратным, простейшим тригонометрическим, показательным и логарифмическим. Применять к решению уравнений и неравенств равносильные и тождественные преобразования. Применять к решению уравнений и неравенств основные разновидности метода равносильных преобразований (разложение на множители, замена переменной, исследование на промежутках области допустимых значений) и функциональные представления. Решать системы уравнений и неравенств.
5. Решать сюжетные задачи, геометрические задачи, задачи на числовые зависимости.
6. Изображать геометрические фигуры на чертеже и проводить простейшие построения на плоскости.
7. Находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях, находить основные характеристики случайных величин.

СТРУКТУРА ПИСЬМЕННОЙ ЭКЗАМЕНАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Выполнение письменной экзаменационной работы рассчитано на 3 академических часа (180 мин.). Форма экзамена – тест.

Тест состоит из 20 заданий двух типов: задания с выбором ответа (обычно из четырех предложенных вариантов); задания с кратким ответом (ответом может быть только одно целое число или десятичная дробь). Правильное решение каждого задания оценивается 5 баллами. Максимально возможный балл за экзаменационную работу равен 100.

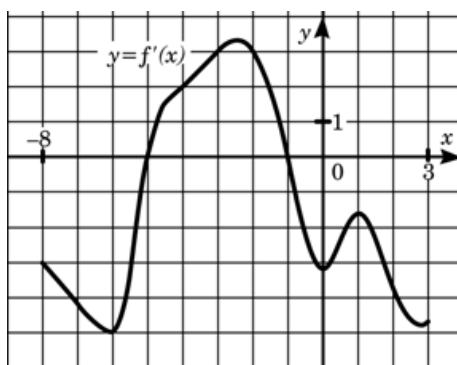
Результат решения каждого задания заносится в бланк ответов. При выполнении заданий с выбором ответа в бланке под номером выполняемого задания нужно поставить знак «X» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного ответа. Числовой ответ к заданиям с кратким ответом нужно вписать в окошко бланка с номером, соответствующим выполняемому заданию.

Обращаем внимание, что решения заданий не оформляются в листе ответов и не проверяются при оценивании работы.

ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОЙ РАБОТЫ

При выполнении заданий 1 – 10 в бланке ответов под номером выполняемого задания поставьте знак «х» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

1. Найдите значение выражения $4^{\log_2 7} - 5$.
 1) -1 2) -3 3) 2 4) 44
2. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $2^{x-1} + 2^{x+1} = 20$.
 1) (4; 5) 2) [3; 4] 3) (2; 3) 4) [1; 2]
3. Найдите сумму всех целых значений из области определения функции $y = \log_x \frac{x+3}{12-x}$.
 1) 65 2) 66 3) 77 4) 78
4. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = 2x^3 + 4x - 7$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.
 1) -1 2) 10 3) 7 4) 12
5. Упростите выражение $\frac{1 - y^{\frac{3}{2}}}{1 + y^{\frac{1}{2}} + y} + 2\sqrt{y}$.
 1) $1 + \sqrt{y}$ 2) $1 + 2\sqrt{y}$ 3) $2\sqrt{y} - 1$ 4) $(1 - \sqrt{y})^2$
6. Решите уравнение $2 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 \frac{x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2}$.
 1) $\frac{\pi n}{4}, n \in Z$ 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z$ 3) $\pi n, n \in Z$ 4) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$
7. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 10$ или совпадает с ней.



- 1) две 2) три 3) ни одной 4) четыре
8. Укажите промежуток, который содержит корень или корни уравнения $\sqrt{36 + 5x} = x$.
 1) (-4; 9) 2) [-4; 9) 3) [-4; 9] 4) (-4; 9]

9. Найдите скалярное произведение $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot (2\vec{m} - \vec{n})$, если известно, что $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 6$ и угол между векторами \vec{m} и \vec{n} равен 120° .
- 1) -1 2) 10 3) -10 4) 16
10. Высота правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна $4\sqrt{3}$, а сторона основания равна 4. Найдите расстояние между вершиной C и точкой пересечения диагоналей грани $AA_1 B_1 B$.
- 1) $2\sqrt{5}$ 2) $4\sqrt{2}$ 3) $4\sqrt{5}$ 4) $2\sqrt{2}$

Ответами заданий 11 – 20 являются целые числа или десятичные дроби. Соответствующее число запишите в бланке ответов в окошке с номером, соответствующим выполняемому заданию.

11. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^3$, $y = 54$ и $x = 0$.
12. Решите уравнение $\cos^2(x \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}$. В ответе укажите корень или сумму корней, если их несколько.
13. Территория около остановки освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года 0,6. Найдите вероятность того, что в течение одного года хотя бы одна лампа не перегорит.
14. Вкладчику на положенные в банк деньги начислили через год 15 тыс. рублей процентных денег. Не снимая деньги со счета, вкладчик добавил ещё 85 тыс. рублей и оставил все деньги ещё на год под те же проценты. По истечении второго срока вклад вместе с процентными начислениями составил 275 тыс. рублей. Сколько тысяч рублей было положено в банк первоначально?
15. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.
16. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.
17. Исследуйте на экстремумы функцию $f(x) = 144^{0,5 \log_2(1-x^3)} + 36x^2 - 3x^3 - 3x^4$. В ответе укажите точку максимума функции или их произведение, если таких точек несколько.
18. Найдите значение функции $f(22)$, если известно, что функция $y = f(x)$ является нечетной, имеет период 12 и на отрезке $[0; 6]$ имеет вид $y = 36x^4 - x^2$.
19. Некоторые виды бактерий вредны для человека. Обычно, если на 1 грамм пищи приходится более 10 млн. таких бактерий, то есть риск отравиться этой пищей. В 8 ч утра 1 грамм пищи содержал 1000 бактерий. Известно, что на открытом воздухе каждые 20 минут каждая бактерия делится на 2 бактерии. Через какое наименьшее число минут пища может стать опасной для человека?
20. Найдите наименьшее целое значение параметра a , при котором неравенство $2^{4a+x} + 2^{4a-x} + 2^{3a+2x} + 2^{3a-2x} \leq 132 \cdot 8^a$ не имеет решения.

СТРУКТУРА ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА ДЛЯ СОБЕСЕДОВАНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

На собеседовании абитуриенту предлагается выполнить задания разного уровня сложности из нескольких разделов математики, соответствующих программе. Время, отводимое на прохождение собеседования, составляет 20 минут.

Билет для собеседования по математике состоит из 6 заданий, выполнение которых оценивается по 100-балльной шкале. В зависимости от полноты и правильности приведенного решения и формулировок математических утверждений, используемых в решении задач, за выполнение заданий 1 и 2 выставляется от 0 до 10 баллов, заданий 3 и 4 – от 0 до 15 баллов, задания 5 – от 0 до 20 баллов, задания 6 – от 0 до 30 баллов.

Для оценивания выполнения заданий используются следующие общие критерии:

Задание 1	
Оценка в баллах	Содержание критерия
10	Верно сформулировано утверждение
7-9	В формулировке утверждения допущены недочеты
4-6	Содержание утверждения проиллюстрировано на конкретных примерах или соответствует частным случаям
1-3	В формулировке утверждения допущены ошибки, но они откорректированы в ходе беседы с экзаменатором
0	Утверждение не сформулировано
Задание 2	
Оценка в баллах	Содержание критерия
10	Ход решения правильный. Решение завершено. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ
6-9	Верно выполнены преобразования. Допустима описка или вычислительная ошибка
3-5	Задание выполнено с ошибкой, которая исправлена в ходе собеседования с экзаменатором
1-2	Абитуриент выполняет задание по формулировке соответствующего математического утверждения, сформулированного экзаменатором
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок от 0 до 10 баллов
Задания 3, 4	
Оценка в баллах	Содержание критерия
15	Ход решения правильный. Решение завершено. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ
12-14	Решение доведено до конца. Допустима описка или вычислительная ошибка
8-11	Сформулирован правильный план решения, верно выполнены только некоторые этапы решения задачи (не менее 70%)
5-7	Представлен правильный план решения, выполнена одна из подзадач поставленного задания
1-5	Выполнена одна из подзадач поставленного задания
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок от 0 до 15 баллов

Задание 5	
Оценка в баллах	Содержание критерия
20	Ход решения правильный. Решение завершено. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
18-19	Решение доведено до конца. Допустимы описки или вычислительная ошибка
11-17	Решение может быть не завершено, но не содержит грубых ошибок
5-10	Решение содержит ошибки, но абитуриент верно формулирует ключевые математические утверждения, необходимые для решения задачи
1-4	Абитуриент выполнил одну из подзадач, сформулированных экзаменатором к поставленному заданию билета
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок от 0 до 20 баллов
Задание 6	
Оценка в баллах	Содержание критерия
30	Приведено обоснованное решение и получен верный ответ. Все преобразования и вычисления выполнены верно
24-29	Решение доведено до конца, но не содержит необходимых обоснований. Допустима описка или вычислительная ошибка
18-23	Решение не доведено до конца, но выявлены все ключевые зависимости геометрической конфигурации
11-17	Ход решения правильный, но решение, возможно, не завершено. Верно найдены некоторые геометрические величины, необходимые в решении задачи. Окончательный ответ не получен или неверен
1-10	Верно выполнен чертеж по условию задачи и сформулированы некоторые теоремы, определения или формулы, необходимые в решении задачи
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок от 0 до 30 баллов

ПРИМЕРЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ ДЛЯ СОБЕСЕДОВАНИЯ

Билет № 1

1. Закончите предложение: «Сумма двух сторон любого треугольника».
2. Упростите выражение $t^{-4.5} \cdot t^{-0.2}$.
3. Решите неравенство $\frac{5x+15}{2x} \geq 0$.
4. Решите уравнение $4^{x^2+x} = 16$.
5. Решите неравенство $\log_4(x-4) < 2$.
6. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектриса угла BAD проходит через середину M стороны CD . Известно, что $AB = 5$, $AM = 4$. Найдите длину отрезка BM .

Билет № 2

1. Закончите предложение: «Биссектрисой угла называется».
2. Вычислите $\sqrt[3]{25 \cdot 135}$.
3. Решите неравенство $x^2 - 5x + 6 < 0$.
4. Решите уравнение $\log_3(4x+8) = \log_3(2x+2)$.

5. Решите неравенство $\left(\frac{1}{11}\right)^{x+2} \geq 11^x$
6. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC .

Билет № 3

1. Закончите предложение: «Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на».
2. Найдите значение выражения $\frac{5^9 \cdot 2^8}{10^7}$.
3. Решите неравенство $x(x^2 - 1)(x + 6) \leq 0$.
4. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 2x - 2} = 1$.
5. Постройте график функции $y = \log_3(x - 2)$.
6. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания равен 45° . Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

Билет № 4

1. Закончите предложение: «График четной функции симметричен».
2. Найдите значение выражения $\log_3 5,4 + \log_3 5$.
3. Решите неравенство $4\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x \geq 1$.
4. Решите уравнение $(x + 3)\sqrt{x - 5} = 0$.
5. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = -x^3 + 2x^2 - 5x + 1$.
6. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 6, а боковое ребро образует с высотой пирамиды угол 60° . Найдите объем пирамиды.