

Министерство образования и науки РФ
Северный (Арктический) федеральный университет
Кафедра математики

Вопросы к экзамену по математике
для студентов заочной формы обучения
специальностей 21.03.02 Землеустройство и кадастры
2 семестр

1. Производная функции. Определение. Свойства.
2. Геометрический, механический и физический смыслы производной. Уравнение касательной и нормали к кривой.
3. Производные сложной, обратной и неявно-заданной функций.
4. Дифференциал функции. Определение. Свойства. Применение.
5. Основные теоремы дифференциального исчисления (т. Ролля, т. Лагранжа и т. Коши).
6. Правило Лопиталя для вычисления пределов.
7. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа.
8. Достаточное условие возрастания (убывания) функции одной переменной.
9. Достаточные условия существования экстремума функции одной переменной.
10. Выпуклость функции. Точки перегиба.
11. Асимптоты кривой.
12. Функция нескольких переменных. Область определения. Способы задания.
13. Частные производные 1-го и 2-го порядков. Дифференциал.
14. Производная по направлению, градиент функции нескольких переменных.
15. Экстремум функции нескольких переменных.
16. Неопределенный интеграл, Определение, свойства.
17. Замена переменных в неопределенном интеграле, Интегрирование по частям функций, интегрирование дробно-рациональных функций, интегрирование тригонометрических функций, интегрирование некоторых иррациональных функций.
18. Определенный интеграл: определение. Свойства, геометрическая интерпретация.
19. Основные теоремы об определенном интеграле. Формула Ньютона-Лейбница.
20. Замена переменных в определенном интеграле. Интегрирование по частям.
21. Несобственные интегралы 1 и 2-го родов. Определение, свойства.
22. Приложения определенного интеграла: вычисление площади плоской фигуры, длины плоской кривой и объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси.

23. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные и Бернулли.
24. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.
25. Дифференциальные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: однородные и неоднородные.

Контрольная работа №1

Задание 1. Найти производные y'_x данных функций.

1.1

а) $y = \frac{\ln x}{\operatorname{tg} x} - \frac{x}{\cos x}$;

б) $y = (\arcsin x)^{x^2}$;

в) $e^{xy} - \cos(x^2 + y^2) = 0$.

1.6

а) $y = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$;

б) $y = (\sin x)^{\ln x}$;

в) $x^3 + y^3 = \sin(x - 2y)$.

1.2

а) $y = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$;

б) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$;

в) $x^2 + y^2 = \ln \frac{y}{x} + 7$.

1.7

а) $y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$;

б) $y = (3x^2 + 3x - 1)^x$;

в) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1.3

а) $y = \frac{x \operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$;

б) $y = (x - 2)^{\sin x}$;

в) $x^4 - y^4 = x^2 y^2$.

1.8

а) $y = \frac{x}{1 + x^2} - \operatorname{arctg} x$;

б) $y = (x + 1)^{\ln x}$;

в) $x \sin y + y \sin x = 0$.

1.4

а) $y = 3x \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$;

1.9

а) $y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$;

$$\text{б) } y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{б) } y = (\operatorname{ctg} x)^{\sin x};$$

$$\text{в) } e^y = e - xy.$$

$$\text{в) } 3^x + 3^y - 3^{xy} = 0.$$

1.5

$$\text{а) } y = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}};$$

1.10

$$\text{а) } y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4};$$

$$\text{б) } y = (\arccos x)^{\arcsin x};$$

$$\text{б) } y = (\ln \cos x)^x;$$

$$\text{в) } x^3 + xy^2 = \sin(x+y).$$

$$\text{в) } \cos(x-y) = x^5 - yx.$$

Задание 2.

Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график.

$$\text{2.1 } y = \frac{4x}{4+x^2}$$

$$\text{2.6 } y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$\text{2.2 } y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$\text{2.7 } y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\text{2.3 } y = \frac{x^3}{x^2+1}$$

$$\text{2.8 } y = \frac{4x^3+5}{x}$$

$$\text{2.4 } y = \frac{x^2-5}{x-3}$$

$$\text{2.9 } y = \frac{x^4}{x^3-1}$$

$$\text{2.5 } y = \frac{4x^3}{x^3-1}$$

$$\text{2.10 } y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$$

Задание 3. Найти частные производные второго порядка функции двух переменных.

$$\text{3.1 } z = 3x^2y^2 + 5xy^2$$

$$\text{3.6 } z = 3x^4 + 2x^2y^3$$

$$\text{3.2 } z = \ln(3x^2 - 4y^2)$$

$$\text{3.7 } z = 5x^2 + 6xy$$

$$\text{3.3 } z = 2x^2 + 8xy + 2xy^2$$

$$\text{3.8 } z = \ln(5x^2 + 3y^2)$$

$$\text{3.4 } z = 7x^2y^2 + 4x^3y^2$$

$$\text{3.9 } z = 2x^2 + 3xy + y^2$$

$$3.5 \quad z = \ln(5x^2 + 4y^2)$$

$$3.10 \quad z = x^2 + xy + y^2$$

Задание 4. Даны функция $z = f(x; y)$, точка $A(x_0; y_0)$ и вектор $\bar{a}(a_1; a_2)$.
Найти:

- 1) $\text{grad } z$ в точке A ;
- 2) производную в точке A по направлению вектора \bar{a} .

Вариант	$z = f(x; y)$	$A(x_0; y_0)$	$\bar{a}(a_1; a_2)$
1	$z = x^2 + xy + y^2$	$A(1; 1)$	$\bar{a}(2; -1)$
2	$z = 2x^2 + 3xy + y^2$	$A(2; 1)$	$\bar{a}(3; -4)$
3	$z = \ln(5x^2 + 3y^2)$	$A(1; 1)$	$\bar{a}(3; 2)$
4	$z = \ln(5x^2 + 4y^2)$	$A(1; 1)$	$\bar{a}(2; -1)$
5	$z = 5x^2 + 6xy$	$A(2; 1)$	$\bar{a}(1; 2)$
6	$z = \text{arctg}(xy^2)$	$A(2; 3)$	$\bar{a}(4; -3)$
7	$z = \arcsin \frac{x^2}{y}$	$A(1; 2)$	$\bar{a}(5; -12)$
8	$z = \ln(3x^2 + 4y^2)$	$A(1; 3)$	$\bar{a}(2; -1)$
9	$z = 3x^4 + 2x^2y^3$	$A(-1; 2)$	$\bar{a}(4; -3)$
10	$z = 3x^2y^2 + 5xy^2$	$A(1; 1)$	$\bar{a}(2; 1)$

Задание 5. Найти экстремумы функции двух переменных.

Вар	Функция	Вар	Функция
1	$z = 2x^3 + 6xy^2 - 30x - 24y$	6	$z = 6x^2y + 2y^3 - 24x - 30y$
2	$z = x^3 - 8y^3 - 6xy + 1$	7	$z = x^3 - 5xy + 5y^2 + 7x - 15y$
3	$z = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y$	8	$z = 2x^2 - 5xy + 2y^3 - 3x + 4y$
4	$z = 3x^2 - 6xy - y^3 - 12x + 12y$	9	$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$

5	$z = x^2y - 2y^3 - x^2 - 5y^2$	10	$z = 2x^3 + y^2 + 6xy + 12x$
---	--------------------------------	----	------------------------------

РГР №2

Задание 1. Найти неопределенные интегралы:

$$1. \int e^{x^2+4x-7}(x+2)dx; \int (x^2 + 31x)\sin x dx; \int \frac{(x+5)dx}{(x-1)(x^2-1)}.$$

$$2. \int \frac{5 \sin x dx}{\sqrt[4]{1+\cos x}}; \int (2x-3)\cos 6x dx; ; \int \frac{(2x+9)dx}{(x^2+4)(x-5)}.$$

$$3. \int \frac{3^{\ln x} dx}{x}; \int (x+8)e^{-2x} dx; ; \int \frac{(x^2-3x)dx}{(x+1)(x-2)^2}.$$

$$4. \int \frac{(\operatorname{tg}x + 5)^2}{\cos^2 x} dx; \int 2x \cdot \operatorname{arctg}x dx; ; \int \frac{(x+2)x}{(2x-1)(x+3)}.$$

$$5. \int \frac{(\operatorname{ctg}x + 1)^3}{\sin^2 x} dx; \int (2x^2 - 3)\cos x dx; ; \int \frac{(4x+5)dx}{x(x^2+2x+1)}.$$

$$6. \int \frac{\ln(3x+5)dx}{(3x+5)}; \int (9-2x)e^{4x} dx; ; \int \frac{(2x-7)dx}{(x-5)(x+2)}.$$

$$7. \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+9}; \int (x+2)\sin 3x dx; ; \int \frac{(2x+1)dx}{(4-x)^3}.$$

$$8. \int \frac{xdx}{(2+x^2)^3}; \int x \operatorname{tg}^2 x dx; ; \int \frac{(x+2)dx}{(x^2-1)(x^2+1)}.$$

$$9. \int \frac{\sin \sqrt{3x}}{\sqrt{3x}} dx; \int (x^3 - 2x + 3)\ln 4x dx; ; \int \frac{2xdx}{(x+1)^2(x-3)}.$$

$$10. \int \frac{dx}{\arctg^3 x(1+x^2)}; \int (2x-4)\sin 5x dx; ; \int \frac{(2x+1)dx}{(x+1)(x-3)} .$$

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость):

$$1. \int_{-4}^0 \frac{dx}{x+4}; \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\arctg x} dx}{x^2+1}$$

$$2. \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}; \int_0^2 \frac{(x-2)dx}{\sqrt[3]{x^5}}$$

$$3. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; \int_1^{+\infty} 3xe^{-x^2} dx$$

$$4. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}; \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$$

$$5. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{25+x^2}; \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

$$6. \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}; \int_2^3 \frac{dx}{x^2+x-12}$$

$$7. \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x dx}{1+x^2}; \int_1^3 \frac{dx}{x(x-3)}$$

$$8. \int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)dx}{3x-1}; \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2-8x+20}$$

$$9. \int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}; \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$10. \int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}; \int_0^{1/3} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

Задание 3. Вычислить площади фигур, ограниченных следующими линиями:

$$1. y = -x^2, x + y + 2 = 0$$

2. $y = -x^2 + 7x - 6, x - y + 2 = 0$

3. $xy = 2, x + y - 3 = 0$

4. $y = x^2, y = 2x + 3$

5. $y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0$

6. $y = x^2 - 6x + 9, y = 3x - 9$

7. $y = x^2, y = 4x - 3$

8. $y^2 = 2x, x^2 = 2y$

9. $y = -x^2 + 9, y = 0$

10. $y = \frac{x^3}{4}, y = 2x$

Задание 4. Вычислить объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси OX плоской фигуры, заданной линиями:

1. $y = -x^2, x + y + 2 = 0$

2. $y = -x^2 + 7x - 6, x - y + 2 = 0$

3. $xy = 2, x + y - 3 = 0$

4. $y = x^2, y = 2x + 3$

5. $y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0$

6. $y = x^2 - 6x + 9, y = 3x - 9$

7. $y = x^2, y = 4x - 3$

8. $y^2 = 2x, x^2 = 2y$

9. $y = -x^2 + 9, y = 0$

10. $y = \frac{x^3}{4}, y = 2x$.

Задание 5. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

1. a) $4xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$;
 б) $y' - \frac{y}{x} = x^2$;
 в) $(x + 2y)dx - xdy = 0$.
2. a) $\sqrt{4 + y^2} dx - ydy = x^2 ydy$;
 б) $y' + \frac{y}{2x} = x^2$;
 в) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.
3. a) $6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx$;
 б) $y' + \frac{2}{x}y = x^3$;
 в) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$.
4. a) $x\sqrt{3 + y^2} dx + y\sqrt{2 + x^2} dy = 0$;
 б) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$;
 в) $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$.
5. a) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x} dx = 0$;
 б) $y' + \frac{y}{x} = 3x$;
 в) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$.
6. a) $x\sqrt{5 + y^2} dx + y\sqrt{4 + x^2} dy = 0$;
 б) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$;
 в) $xdy + (2y - x)dx = 0$.
7. a) $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$;
 б) $y' + 2xy = -2x^3$;
 в) $y' = -\frac{x + y}{x}$.
8. a) $2xdx - 2ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx$;
 б) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$;
 в) $(x + y)dx + xdy = 0$.
9. a) $x\sqrt{4 + y^2} dx + y\sqrt{1 + x^2} dy = 0$;
 б) $y' - 4xy = -4x^3$;
 в) $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$.
10. a) $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$;
 б) $y' + xy = -x^3$;
 в) $xdy = (x + 2y)dx$.

Задание 6. Решить дифференциальные уравнения высших порядков.

1. $y''' = \cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \frac{15}{16}$, $y''(0) = 0$
2. $y'' = \cos x + e^{-x}$, $y(0) = -e^{-x}$, $y'(0) = 1$

$$3. y'' = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0$$

$$4. y'' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$5. y'' = \sqrt{x} + \sin 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7}{9}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$6. y''(x+2)^5 = 1, \quad y(-1) = \frac{1}{12}, \quad y'(-1) = -\frac{1}{4}$$

$$7. y'' = 4 \cos 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

$$8. y'' = \sin^2 3x, \quad y(0) = -\frac{\pi^2}{16}, \quad y'(0) = 0$$

$$9. y''' = \frac{6}{x^3}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 5, \quad y''(1) = 1$$

$$10. xy''' = 2, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0$$

Задание 7. Решить линейное дифференциальное уравнение.

$$1. y'' + 9y = 6e^{3x}$$

$$6. y'' - 7y' + 12y = x$$

$$2. y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$$

$$7. y'' - 7y' + 12y = e^{2x}$$

$$3. y'' + 4y = 2 \sin 2x$$

$$8. y'' - 4y' + 3y = 12 \sin x - 4 \cos x$$

$$4. y'' - 9y = x + 1$$

$$9. y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$$

$$5. y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

$$10. 4y'' - 12y' + 9y = e^x$$

Учебно-методическая литература

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. т.1, М: Высшая школа –2003, 304 с.
2. Ерилова Е.Н. Определенный интеграл: Методические рекомендации по выполнению расчетно-графической (контрольной) работы.- Архангельск: Изд-во АГТУ, 2008–37 с.
3. Кручкович Г.И., Гутарина Н.И., Дюбюк П.Е. Сборник задач по курсу высшей математики.- М.: Высшая школа, 1973.- 576 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс.- 4 изд.- М.: Айрис-прес, 2006.- 608 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1, 2 ч.- М.: Рольф, 2001.
6. Шипачев В.С. Высшая математика. - М.: Высшая школа, - 1996, 479 с.

Утверждаю:

Заведующий кафедрой математики

В.Н. Попов

28.12.2017