

Часть 1. Операционное исчисление. Уравнения математической физики

**Задача 1.** Найдите изображения функций.

- 1.1.  $f(t) = \sin 2t$ ;  $f(t) = e^{2t} \cos 3t$ ;  $f(t) = t \operatorname{sh} \frac{t}{2}$ .  
1.2.  $f(t) = \operatorname{sh} 2t$ ;  $f(t) = e^{2t} \sin 3t$ ;  $f(t) = 2t \operatorname{ch} \frac{t}{2}$ .  
1.3.  $f(t) = \operatorname{ch} 3t$ ;  $f(t) = e^{2t} \operatorname{ch} 2t$ ;  $f(t) = 4t \operatorname{sh} \frac{t}{2}$ .  
1.4.  $f(t) = \sin \frac{t}{2}$ ;  $f(t) = e^{2t} \operatorname{sh} 3t$ ;  $f(t) = -t \operatorname{sh} 2t$ .  
1.5.  $f(t) = \cos \frac{t}{2}$ ;  $f(t) = e^{-t} \cos 2t$ ;  $f(t) = t \sin 2t$ .  
1.6.  $f(t) = e^{4t}$ ;  $f(t) = e^{-t} \cos 3t$ ;  $f(t) = 5t \cos 2t$ .  
1.7.  $f(t) = 2t + 1$ ;  $f(t) = e^{-t} \operatorname{ch} 3t$ ;  $f(t) = -4t \operatorname{sh} 2t$ .  
1.8.  $f(t) = 3t - 1$ ;  $f(t) = e^{-t} \operatorname{sh} \frac{t}{2}$ ;  $f(t) = 5t \sin 2t$ .  
1.9.  $f(t) = \operatorname{sh} 5t$ ;  $f(t) = e^{-4t} \cos 2t$ ;  $f(t) = -5t \cos 3t$ .  
1.10.  $f(t) = \cos 2t$ ;  $f(t) = e^{-4t} \sin 3t$ ;  $f(t) = 3t \operatorname{sh} 6t$ .

**Задача 2.** Найдите оригинал по заданному изображению.

- 2.1.  $F(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5}$ . 2.6.  $F(p) = \frac{4p + 5}{p^2 + 4p + 5}$ .  
2.2.  $F(p) = \frac{2p}{p^2 + 4p + 8}$ . 2.7.  $F(p) = \frac{p}{p^2 + p + 1}$ .  
2.3.  $F(p) = \frac{p + 4}{p^2 + 4p + 5}$ . 2.8.  $F(p) = \frac{p + 5}{p^2 + 2p + 5}$ .  
2.4.  $F(p) = \frac{1 - p}{p^2 + 2p + 3}$ . 2.9.  $F(p) = \frac{2 - 3p}{p^2 - 2p + 5}$ .  
2.5.  $F(p) = \frac{2 - p}{p^2 - 4p + 5}$ . 2.10.  $F(p) = \frac{3p - 2}{p^2 - 6p + 10}$ .

**Задача 3.** Операционным методом решите дифференциальное уравнение  $y' + ay = 0$  при условии  $y(0) = 1$ .

- 3.1.  $a = 4$ . 3.6.  $a = -4$ .  
3.2.  $a = 5$ . 3.7.  $a = 7$ .  
3.3.  $a = -3$ . 3.8.  $a = 6$ .  
3.4.  $a = -2$ . 3.9.  $a = -6$ .  
3.5.  $a = 8$ . 3.10.  $a = 9$ .

**Задача 4.** Операционным методом решите задачу Коши.

- 3.1.  $y''+y=2\cos t, y(0)=0, y'(0)=1.$
- 3.2.  $y''+y=t, y(0)=0, y'(0)=1.$
- 3.3.  $y''+y=0, y(0)=1, y'(0)=0.$
- 3.4.  $y''+y=1, y(0)=-1, y'(0)=0.$
- 3.5.  $y''+y=2\sin t, y(0)=0, y'(0)=1.$
- 3.6.  $y''+2y'+y=t, y(0)=0, y'(0)=0.$
- 3.7.  $y''-3y'+2y=2e^t, y(0)=1, y'(0)=3.$
- 3.8.  $y''+9y=1, y(0)=0, y'(0)=0.$
- 3.9.  $y''+4y=\sin 3t, y(0)=0, y'(0)=0.$
- 3.10.  $y''+y'-2y=e^t, y(0)=-1, y'(0)=0.$

**Задача 5.** Методом Фурье решить уравнение свободных колебаний струны длиной  $\ell$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с заземленными концами при начальных условиях

$$u(x;t)|_{t=0} = x(x-\ell), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 5.1. $a^2 = 1, \ell = 2.$   | 5.6. $a^2 = 1/9, \ell = 3.$ |
| 5.2. $a^2 = 9, \ell = 3.$   | 5.7. $a^2 = 4/9, \ell = 4.$ |
| 5.3. $a^2 = 4, \ell = 4.$   | 5.8. $a^2 = 1/9, \ell = 1.$ |
| 5.4. $a^2 = 16, \ell = 1.$  | 5.9. $a^2 = 16, \ell = 2.$  |
| 5.5. $a^2 = 1/4, \ell = 2.$ | 5.10. $a^2 = 25, \ell = 5.$ |

**Задача 6.** Методом Фурье решить уравнение теплопроводности для бесконечного стержня

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальном условии

$$u(x;t)|_{t=0} = \begin{cases} 0, & |x| > h \\ T, & -h \leq x \leq h \end{cases}$$

- |  |   |
|--|---|
| 5.1. $a^2 = 1, T = -\pi, h = \pi.$     | 5.6. $a^2 = 1/9, T = 2\pi, h = \pi/2.$  |
| 5.2. $a^2 = 9, T = 2\pi, h = \pi.$     | 5.7. $a^2 = 4/9, T = -2\pi, h = \pi/2.$ |
| 5.3. $a^2 = 4, T = -2\pi, h = \pi.$    | 5.8. $a^2 = 1/9, T = \pi, h = 3\pi/2.$  |
| 5.4. $a^2 = 16, T = \pi, h = \pi/2.$   | 5.9. $a^2 = 16, T = -\pi, h = 3\pi/2.$  |
| 5.5. $a^2 = 1/4, T = -\pi, h = \pi/2.$ | 5.10. $a^2 = 25, T = 2\pi, h = 3\pi/2.$ |

Часть 2. Элементы дискретной математики

**Задача 1 (о максимальном потоке в сети).** Требуется определить максимальный поток в сети из вершины  $X_i$  в вершину  $X_j$ , где числа на дугах, снабженные стрелками, означают пропускные способности этих дуг в указанных направлениях. Номера вершин  $i$  и  $j$  для каждого варианта приведены в таблице.

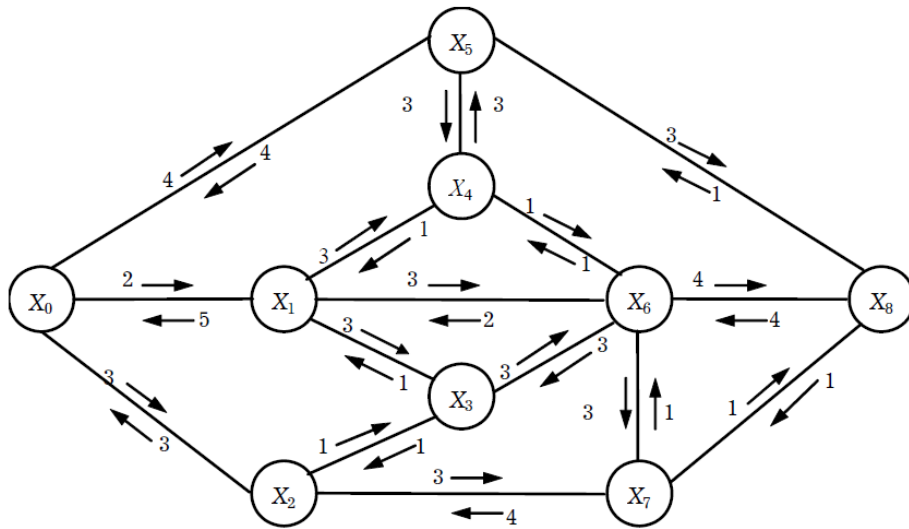


Таблица вариантов

№ вар.	Начальная вершина $i$	Конечная вершина $j$
1	0	2
2	0	3
3	0	4
4	0	5
5	0	6
6	0	7
7	0	8
8	1	2
9	1	3
10	1	4

**Задача 2.** Дана булева функция  $F = F(X;Y;Z;T) = ((A \leftrightarrow B) \rightarrow C) \vee (A \wedge D)$ .

1. Постройте таблицу истинности функции  $F$ .
2. Найдите многочлен Жегалкина булевой функции  $\beta(F)$ .
3. Найдите СДНФ и СКНФ функции  $F$ .
4. Постройте РКС с функцией проводимости  $F$  по найденным СДНФ и СКНФ.

Вариант	$A$	$B$	$C$	$D$
1	$X$	$Y$	$T$	$Z$
2	$X$	$Z$	$T$	$Y$
3	$X$	$T$	$Z$	$Y$
4	$Y$	$X$	$T$	$Z$
5	$Y$	$Z$	$T$	$X$
6	$Y$	$T$	$Z$	$X$
7	$Z$	$X$	$T$	$Y$
8	$Z$	$Y$	$T$	$X$
9	$Z$	$T$	$Y$	$X$
10	$T$	$X$	$Z$	$Y$

## Теоретические вопросы

### Операционное исчисление

1. Определение функции-оригинала.
2. Определение функции-изображения. Преобразование Лапласа.
3. Теорема о существовании изображения.
4. Свойства преобразования Лапласа.
5. Дифференцирование оригинала.
6. Таблица оригиналов и изображений.
7. Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений.

### Уравнения математической физики

1. Задача колебания струны, начальные и граничные условия. Общее уравнение.
2. Линейная задача теплопроводности (задача о распространении тепла в стержне), начальные граничные условия для конечного и бесконечного стержня. Общее уравнение.
3. Методом Фурье решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка.
4. Решение уравнения колебаний струны методом Фурье.
5. Решение уравнения теплопроводности методом Фурье.

### Элементы дискретной математики

1. Теория графов. Задача о максимальном потоке.
2. Булевы функции.
3. Нормальные формы (СДНФ и СКНФ).
4. Многочлен Жегалкина.
5. Релейно-контактные схемы (РКС).

## Литература

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. – М.: Высшая школа, 1980.
2. Очан Ю.С. Сборник задач по методам математической физики. – М.: Высшая школа, 1967.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. Т.2. – М.: Наука, 1970-1985.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис Пресс, 2006.
5. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. – М.: Айрис-пресс, 2007.
6. Захаров Е.В. Уравнения математической физики: учебник для студ. высш. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2010.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова»

Кафедра математики

(наименование кафедры)

(фамилия, имя, отчество студента)

Высшая школа \_\_\_\_\_ курс \_\_\_\_\_ группа \_\_\_\_\_

(код и наименование направления подготовки/специальности)

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА**

По дисциплине \_\_\_\_\_ Прикладная математика

На тему \_\_\_\_\_ Вариант №

(наименование темы)

Отметка о зачёте \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ (дата)

Руководитель \_\_\_\_\_

ассистент

(должность)

\_\_\_\_\_ (подпись)

Д.А. Рудный

(инициалы,  
фамилия)